

Modelos Viscoelásticos Aplicáveis a Materiais Reais: uma Revisão

R. F. Navarro¹

¹ Unidade Acadêmica de Engenharia de Materiais, Laboratório CERTBIO – Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Av. Aprígio Veloso, 882, Bodocongó, Campina Grande – PB.

(Recebido em 21/06/2017; revisado em 19/07/2017; aceito em 03/08/2017)
(Todas as informações contidas neste artigo são de responsabilidade dos autores)

Resumo:

No presente trabalho, é feita uma revisão abordando todas as combinações possíveis entre as analogias mecânicas mola (representando comportamento elástico) e amortecedor (representando o comportamento viscoso) que caracterizem o comportamento viscoelásticos de materiais não ideais (reais) de uso comum pela indústria em seus mais diversos ramos. Para cada modelo, são apresentadas, quando existentes, soluções para esforços transientes (fluência e relaxação) e harmônicos, acrescidas de representação gráfica do comportamento das propriedades viscoelásticas (função de fluência, módulo de relaxação, módulo complexo, tangente de perda) em função do módulo, viscosidade e suas relações com os tempos de relaxação ou retardação, tempo e frequência de aplicação do esforço. Pretende-se fornecer ao leitor todas as respostas necessárias às demandas de projetos envolvendo materiais viscoelásticos.

Palavras-chave: Modelos; Propriedades Mecânicas; Viscoelasticidade.

Abstract:

In the present work, a review is made by covering all the possible combinations between the mechanical analogies spring (representing elastic behavior) and damper (representing the viscous behavior) which characterize the viscoelastic behavior of non-ideal (real) materials commonly used by industry in its several branches. For each model, solutions for transient (creep and relaxation) and harmonic loading are presented, including the graphical representation of the behavior of the viscoelastic properties (creep function, relaxation modulus, complex modulus, loss tangent) versus modulus, viscosity and its relations with the relaxation or retardation times, time and frequency of loading applications. It is intended to provide the reader with all necessary answers to the projects demands involving viscoelastic materials.

Keywords: Models; Mechanical Properties; Viscoelasticity.

1. Introdução

Alguns materiais, sobretudo os poliméricos, apresentam propriedades mecânicas que em determinados aspectos se assemelham a um sólido elástico que obedece à lei de Hooke para a elasticidade; e em outros, à lei de Newton para a viscosidade. A esse comportamento dualístico dá-se o nome de viscoelasticidade.

Embora todos os materiais em determinadas situações apresentem propriedades mecânicas dependentes do tempo, os polímeros, devido à superestrutura molecular complexa que possuem, têm suas propriedades fortemente dependentes do tempo, se comportando como sólidos em tempos curtos ou em resposta a uma carga aplicada rapidamente, tendendo a um comportamento de característico de fluidos viscosos se essa carga é mais lentamente aplicada ou em tempos muito longos de carregamento.

Um material viscoelástico linear é todo aquele que apresente uma relação linear entre a tensão e a deformação em um dado tempo. Esse material, em geral, apresenta uma

deformação instantânea, ε_0 , quando se é aplicada uma tensão ($\sigma = \sigma_0$). Essa deformação cresce com o tempo de aplicação dessa tensão, $\varepsilon(t)$, em um comportamento chamado de fluência. Após a remoção da carga, ($\sigma = 0$), o material deve apresentar uma recuperação imediata da deformação de magnitude igual à da deformação instantânea inicial, $\varepsilon_R = \varepsilon_0$, demandando um certo tempo para obter grande parte da deformação sofrida, em um processo chamado de recuperação elástica retardada, porém permanecendo uma fração da deformação sofrida mesmo em tempos infinitos, ε_∞ . Graficamente, seria como mostrado na Figura 1.

Todo o conceito da viscoelasticidade linear, além das etapas vistas na Figura 1, deve incluir o fato de que a relação linear entre tensão e deformação, variáveis com o tempo, deve pressupor que pequenas alterações na tensão devem ser seguidas por equivalentes e pequenas alterações no produto módulo x deformação, como previsto por Boltzmann em seus históricos e iniciais trabalhos com sólidos viscoelásticos nos idos de 1876. Assim, é válida a relação

$$d\sigma = \varepsilon dE \quad (i)$$

*Email: romulonavarro13@gmail.com (R. F. Navarro)

em que $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon$, é o módulo de relaxação, ou seja, o módulo resultante da variação da tensão com o tempo, $\sigma(t)$, quando um material é submetido a uma deformação constante, ε . Em uma situação como essa, em um fluido ideal, a tensão relaxa instantaneamente a zero tão logo a deformação é mantida constante; em um sólido ideal, a tensão permaneceria constante, e não haveria relaxação.

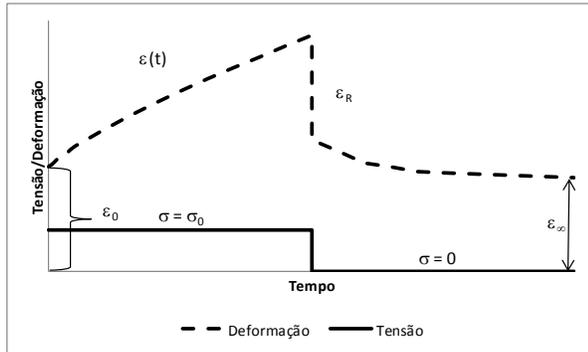


Figura 1. Estágios do comportamento viscoelástico em função de $\sigma(t)$.

Introduzindo-se uma função de memória dada por

$$M(t) = -\frac{dE(t)}{dt}$$

em que o sinal negativo tem a função de tornar $M(t)$ positiva, já que $E(t)$ cai com o tempo, a Eq. i se torna

$$d\sigma = -M\varepsilon dt$$

se o módulo de relaxação e, portanto, a função de memória forem função apenas do tempo, pode-se inferir deformações em escala muito maior, desde que a deformação ainda esteja dentro da faixa linear do material, a partir da soma de cada pequena etapa de deformação que o material tenha sofrido ao longo do tempo. Isso está de acordo com o afirmado por Maxwell, para o qual o estado de um sólido não depende apenas das forças que atuam atualmente sobre ele, mas de todas as deformações que tenha sofrido até o ponto atual. A solução é aplicar uma integral sobre todo o intervalo de tempo passado, de forma que

$$\int_0^t d\sigma = \sigma = -\int_{-\infty}^t M(t-t')\varepsilon(t')dt' \quad (ii)$$

em que t' é uma variável de tempo decorrido desde o passado infinito, $-\infty$, até o tempo presente t . A função de memória depende apenas do tempo passado, $s = t - t'$ entre o tempo rememorado e o presente. Incluindo-se a definição de tempo passado, s , na Eq. ii, tem-se que

$$\sigma = \int_0^\infty M(s)\varepsilon(t-s)ds$$

ou em termos do módulo de relaxação,

$$\sigma = \int_0^\infty G(s)\frac{d\varepsilon}{dt}(t-s)ds \quad (iii)$$

A Eq. iii é a forma integral do princípio de superposição de Boltzmann, ao qual o conceito de viscoelasticidade linear segue plenamente.

Em sua forma diferencial, o conceito de viscoelasticidade linear pode ser escrito como sendo

$$\sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (iv)$$

forma essa que é equivalente à equação constitutiva do modelo de Maxwell (Eq. 8), após a introdução do conceito de tempo de relaxação $\lambda = \eta/E$, e que é obtida a partir da diferenciação do equivalente à Eq. iii, com a substituição da variável s por $t - t'$ e da inclusão de uma solução particular da variação do módulo de relaxação com o tempo segundo a forma $E(t) = E_0 e^{-t/\lambda}$.

Para estágios de deformação muito amplos, ou seja, para deformações maiores que uma dada deformação crítica, a tensão e, por conseguinte, o módulo de relaxação deixam de ser dependentes apenas do tempo e passam a depender também da magnitude da deformação, e a viscoelasticidade deixa de ser linear para ser não linear. Assim, tem-se que:

$$E(t, \varepsilon)_{\varepsilon > \varepsilon_c} = \frac{\sigma(t, \varepsilon)_{\varepsilon > \varepsilon_c}}{\varepsilon} \quad (v)$$

Para explicar as várias nuances da viscoelasticidade, é feito uso de analogias mecânicas como uma mola, para explicar o comportamento elástico instantâneo após aplicação da carga e a posterior recuperação quando de sua remoção; e um amortecedor para caracterizar o comportamento viscoso, ou seja, a resposta retardada do material à aplicação da carga, ao crescimento da deformação com o tempo e a impossibilidade de relaxação total, mesmo em tempos infinitos. Como cada analogia em separado não caracteriza mais do que uma fase da viscoelasticidade, vários modelos, utilizando-se de associações entre mola e amortecedor, foram propostos com esse propósito. Alguns, de tão simples, nem apresentam todas as fases nem encontram aplicações práticas; outros, de tão complexos, sequer são utilizados mesmo que possam apresentar todas ou quase todas fases da viscoelasticidade. A seguir, serão apresentadas todas as formas possíveis e de utilização prática de associações entre molas e amortecedores.

Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell é considerado um dos mais simples entre os modelos idealizados para representar a viscoelasticidade. Ele caracteriza-se por uma associação em série entre uma mola e um amortecedor, como mostrado na Figura 2.



Figura 2. Modelo de Maxwell

Para elementos em série, a tensão é a mesma em cada um deles, e a deformação do será a soma das deformações individuais, ou seja,

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_p \quad (1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_p \quad (2)$$

em que os índices *m* e *p* estão relacionados com a mola e o amortecedor, respectivamente, e

$$\sigma_m = E_1 \varepsilon_m \quad (3)$$

e

$$\sigma_p = \eta_1 \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad (4)$$

Pela forma como a tensão se relaciona com mola e amortecedor, vê-se ser impossível realizar a soma prevista na Eq. 2. Todavia, sabe-se que:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_m}{dt} + \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad (5)$$

De (3), tem-se que:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_1} = \frac{\sigma}{E_1}$$

assim,

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \quad (6)$$

Da mesma forma, de (4), tem-se que:

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (7)$$

Substituindo-se (6) e (7) em (5), obtém-se:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (8)$$

A Eq. (8) é a equação reológica ou do movimento para o Modelo de Maxwell, a qual será utilizada para a obtenção de

soluções particulares relativas às situações de fluência e relaxação, que são os carregamentos transientes mais comuns, e carregamento harmônico.

Fluência

Se o modelo de Maxwell for submetido, em $t = 0$, a uma tensão constante, $\sigma = \sigma_0$, a Eq. (8) se reduz a:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta_1} \quad (9)$$

ou seja, o presente modelo se comportará como um fluido newtoniano, cuja função de fluência será obtida pela integração de (9) desde 0 até t . Assim, uma vez que o modelo permite uma deformação imediata pela ação da tensão sobre a mola,

$$\varepsilon(t)_{t=0} = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_1}$$

de forma que, a partir da separação das variáveis de (9),

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} d\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\sigma_0}{\eta_1} dt$$

e

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{\eta_1} t \quad (10)$$

Dividindo-se a Eq. (10) por σ_0 , tem-se que:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} + \frac{t}{\eta_1} \quad (11)$$

Definindo-se compliância como sendo o inverso do módulo, pode-se apresentar a Eq. (11) em termos da compliância de fluência, ou seja,

$$J(t) = J_0 + \frac{t}{\eta_1} \quad (12)$$

em que

$$J_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = \frac{1}{E_1}$$

representa a compliância instantânea do modelo que é a sua resposta elástica imediata à aplicação da tensão em $t = 0$. A Figura 3 mostra o formato da dependência $J(t)$.

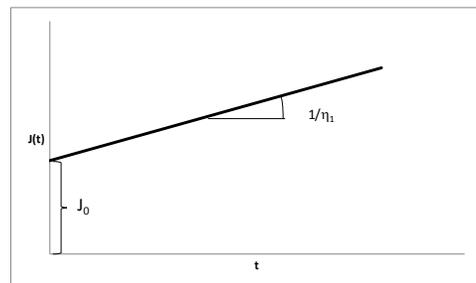


Figura 3. Compliância de fluência para o Modelo de Maxwell.

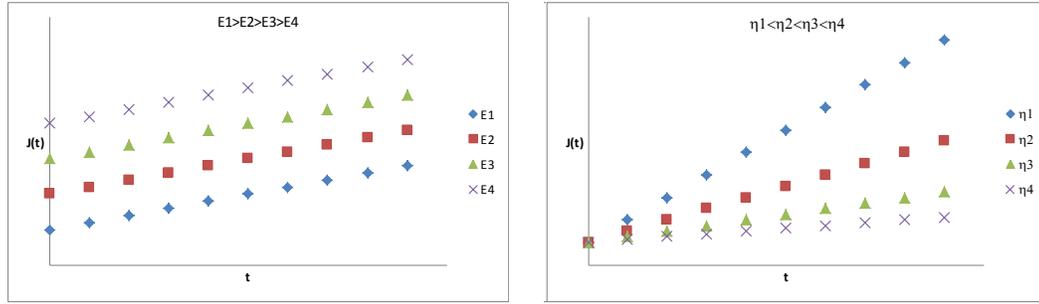


Figura 4. Efeito do módulo elástico e da viscosidade sobre a compliância de fluência do Modelo de Maxwell.

Na Figura 4, é possível observar a influência da variação no valor do módulo elástico inicial e da viscosidade do amortecedor imaginário no formato da dependência $J(t)$. Quanto maior o módulo menor a compliância instantânea, J_0 , e, portanto, a curva se desloca para baixo, mantendo-se paralela à referente ao módulo menor, indo de E_4 para E_1 . No caso da viscosidade, mantendo-se o mesmo módulo inicial, as curvas de $J(t)$ iniciam-se em uma mesma compliância instantânea, J_0 , tendo um crescimento menos agudo quanto maior for o valor da viscosidade.

Relaxação

Se no tempo $t = 0$, for aplicada uma deformação constante, ϵ_0 , ao Modelo de Maxwell, a Eq. (8) se reduz a:

$$\frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_1} = 0$$

que pode ser trabalhada gerando:

$$d\sigma(t) = -\frac{\sigma(t)}{\lambda} dt$$

$$\frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)} = d \ln \sigma(t) = -\frac{dt}{\lambda}$$

$$\int d \ln \sigma(t) = -\frac{1}{\lambda} \int dt + C$$

$$\ln \sigma(t) = -t/\lambda + C$$

Se, para $t = 0$ existir uma $\sigma(0) = \sigma_0$, devido ao módulo instantâneo, E_0 ,

$$C = \ln \sigma_0$$

logo,

$$\ln \sigma(t) - \ln \sigma_0 = \ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = -t/\lambda$$

então,

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\lambda} \quad (13)$$

com $\lambda = \eta_1/E_1$, sendo tempo de relaxação do modelo.

Se a Eq. (13) for dividida em ambos os lados pela deformação constante, ϵ_0 , obtém-se o módulo de relaxação do Modelo de Maxwell dado por:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = E_1 e^{-t/\lambda} \quad (14)$$

Como mostrado na Figura 5, quanto maior o tempo de relaxação mais lenta será a queda do módulo de relaxação com o tempo. Para uma mesma viscosidade, um tempo maior de relaxação significa um módulo menor, ou seja, módulos menores implicam em menor queda com o tempo.

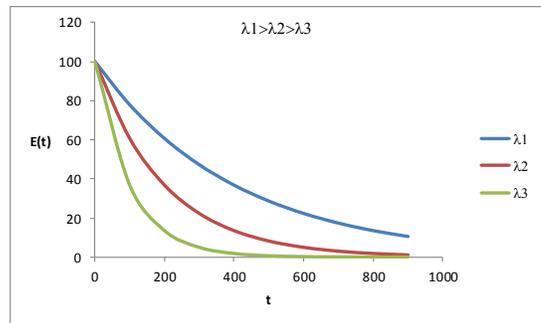


Figura 5. Efeito do tempo de relaxação na dependência $E(t)$ para o modelo de Maxwell.

Carregamento Harmônico

Os ensaios e observações feitos em função do tempo demandam muito tempo para a sua completude. Uma possibilidade de redução de tempo é submeter o material a um carregamento do em que tensão ou deformação varie harmonicamente com o tempo. Esse tipo de esforços permite identificar o que é armazenado e o que é perdido em cada ciclo de deformação, identificando o ângulo de defasagem entre tensão e deformação, e, portanto, o caráter viscoelástico do material.

Em termos de ângulo de fase, em um material idealmente elástico (hookeano), tensão e deformação estão em fase, ou seja, o ângulo de fase, δ , é nulo ($\delta = 0$), caracterizando que todo o esforço é armazenado e toda deformação será

recuperada. Por outro lado, um fluido idealmente viscoso (newtoniano) irá apresentar tensão e deformação defasadas em 90°, caracterizando um processo 100% irreversível. Um material viscoelástico irá apresentar um ângulo de fase $0^\circ < \delta < 90^\circ$.

Os esforços harmônicos, geralmente, são apresentados desta forma:

$$Z = ae^{ib}$$

que pela identidade de Euler assume a forma polar

$$Z = a(\cos b + i \sin b)$$

que passa para a forma retangular ou cartesiana

$$Z = x + iy$$

com

$$\begin{aligned} |Z| &= a \\ x &= a \cos b \\ y &= a \sin b \end{aligned}$$

Assim, se um elemento ou modelo de Maxwell for submetido, em $t = 0$, a um esforço do tipo

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$$

a Eq. (8) se transforma em

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{1}{E_1} i\omega\sigma_0 e^{i\omega t} + \frac{\sigma_0 e^{i\omega t}}{\eta_1} \\ \int d\varepsilon(t) &= \int \frac{1}{E_1} i\omega\sigma_0 e^{i\omega t} dt + \int \frac{\sigma_0 e^{i\omega t}}{\eta_1} dt \\ \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0 e^{i\omega t}}{E_1} + \frac{\sigma_0 e^{i\omega t}}{i\omega\eta_1} \end{aligned} \quad (15)$$

Definindo-se uma compliância complexa

$$J^*(\omega) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma(t)}$$

tem-se que:

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{i\omega\eta_1} \quad (16)$$

Sabendo-se que $i = \sqrt{-1}$, multiplicando-se e dividindo-se o termo mais à direita da Eq. (16) por i , obtém-se

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E_1} - i \frac{1}{\omega\eta_1} \quad (17)$$

Sendo proposto um modelo do tipo

$$J^*(\omega) = J' - iJ'' \quad (18)$$

define-se $J' = \frac{1}{E_1}$ como sendo a compliância de armazenamento, e $J'' = \frac{1}{\omega\eta_1}$ a compliância de perda para o modelo de Maxwell.

Embora $J = 1/E$, $J(t) \neq \frac{1}{E(t)}$, já que $J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$ e $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$. Todavia, $J^*(\omega) = \frac{1}{E^*(\omega)}$, sendo então possível, a partir da Eq. (18), a obtenção de uma expressão para o módulo complexo e suas componentes de armazenagem e perda. Ou seja,

$$\begin{aligned} E^*(\omega) &= \frac{1}{J' - iJ''} = \frac{1}{J' - iJ''} \times \frac{J' + iJ''}{J' + iJ''} = \\ &= \frac{J'}{J'^2 + J''^2} + i \frac{J''}{J'^2 + J''^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{E_1}}{\left(\frac{1}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega\eta_1}\right)^2} + i \frac{\frac{1}{\omega\eta_1}}{\left(\frac{1}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega\eta_1}\right)^2} \end{aligned}$$

reorganizando

$$E^*(\omega) = E_1 \left(\frac{\omega^2 \lambda^2}{\omega^2 \lambda^2 + 1} \right) + iE_1 \left(\frac{\omega \lambda}{\omega^2 \lambda^2 + 1} \right) \quad (19)$$

propondo-se

$$E^*(\omega) = E' + iE''$$

tem-se que:

$$E' = E_1 \left(\frac{\omega^2 \lambda^2}{\omega^2 \lambda^2 + 1} \right)$$

e

$$E'' = E_1 \left(\frac{\omega \lambda}{\omega^2 \lambda^2 + 1} \right)$$

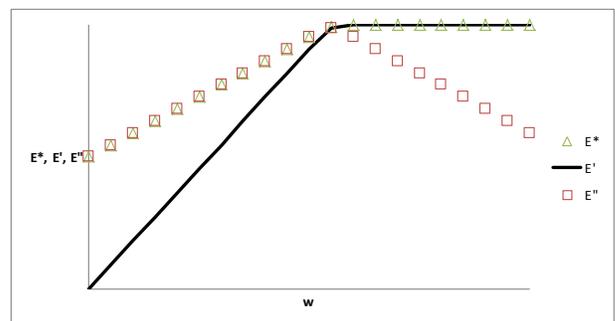


Figura 6. Módulos complexos, de armazenagem e perda em função da frequência para o modelo de Maxwell.

Por definição, o ângulo de fase ou de perda é dado por:

$$\arctg(\delta) = \frac{J''}{J'} = \frac{E''}{E'} \quad (19)$$

para o modelo de Maxwell,

$$tg(\delta) = \frac{1}{\omega\eta_1} = \frac{E_1}{\omega\eta_1}$$

Introduzindo-se a definição do tempo de relaxação, tem-se:

$$tg(\delta) = \frac{1}{\omega\lambda} \quad (20)$$

Como, pela Eq. (19), $tg(\delta) = E''/E'$, então,

$$tg(\delta) = \frac{E_1 \left(\frac{\omega\lambda}{\omega^2\lambda^2 + 1} \right)}{E_1 \left(\frac{\omega^2\lambda^2}{\omega^2\lambda^2 + 1} \right)} = \frac{1}{\omega\lambda}$$

que é o mesmo resultado mostrado na Eq. (20). O ponto em que $E' = E''$ é o chamado ponto de gel (vide Figura 6), e ocorre quando o ângulo de fase, δ é igual a 45° ou $\frac{\pi}{4}$, visto que $tg \delta = 1$.

Como mostrado na Figura 7, o modelo de Maxwell é um sólido em tempos curtos e um líquido em tempos longos, esse comportamento é caracterizado pela variação do ângulo de fase que vai de zero em tempos curtos para 90° quando o tempo tende a infinito.

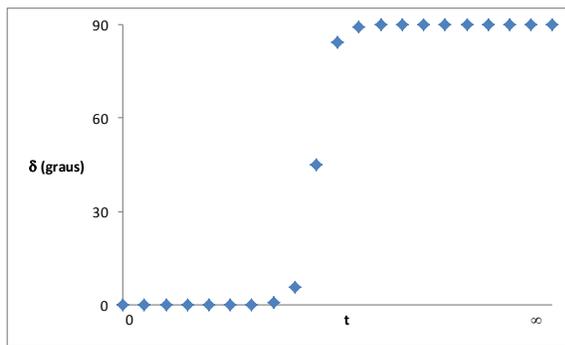


Figura 7. Variação do ângulo de fase com o tempo para o modelo de Maxwell

Modelo de Voigt

O segundo modelo mais simples é representado pela associação em paralelo da mola e do amortecedor como mostrado na Figura 8.

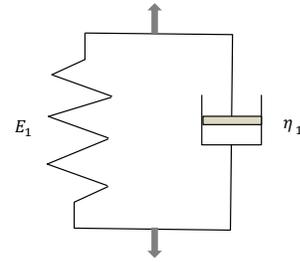


Figura 8. Modelo de Voigt.

Para modelos em paralelo, a tensão total será a soma das individuais, e a deformação será igual em todos os elementos. Dessa forma, são válidas as seguintes relações:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_p \quad (21)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_p \quad (22)$$

Substituindo-se as Eqs. (3) e (4) na Eq. (21), tem-se que:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_m(t) + \eta_1 \frac{d\varepsilon_p(t)}{dt}$$

que combinada com a Eq. (22) resulta em:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (23)$$

Fluência

Se ao modelo de Voigt for aplicada uma tensão constante em $t = 0$, a Eq. (23) assume a seguinte forma:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{\varepsilon(t)}{\lambda} = \frac{\sigma_0}{\eta_1} \quad (24)$$

com $\lambda = \eta_1/E_1$, agora sendo o tempo de retardamento ou retardação, ou seja, o tempo que o modelo leva para apresentar uma deformação após a imposição da tensão.

A Eq. (24) tem forma semelhante a uma do tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (25)$$

cuja solução é a seguinte:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \quad (26)$$

Se $p(x) \approx p$ e $q(x) \approx q$, como é o caso da Eq. (24), uma solução para a Eq. (26), com um valor inicial $y_0 = y(x)_{x=0}$, é a seguinte:

$$y = \left(y_0 - \frac{q}{p} \right) e^{p(x_0-x)} + \frac{q}{p} \quad (27)$$

Comparando-se as Eqs. (24) e (26), e sabendo-se que para $x = 0 = x_0, y_0 = 0$ e substituindo-se na Eq. (27), tem-se que:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\sigma_0}{E_1} e^{-t/\lambda} + \frac{\sigma_0}{E_1} = \frac{\sigma_0}{E_1} (1 - e^{-t/\lambda}) \quad (28)$$

Dividindo-se ambos os lados da Eq. (28) por σ_0 , obtém-se a compliância de fluência para o modelo de Voigt dada por:

$$J(t) = J_0 (1 - e^{-t/\lambda}) \quad (29)$$

com $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$ podendo ser definida como uma função de fluência para o modelo com compliância $J_0 = 1/E_1$.

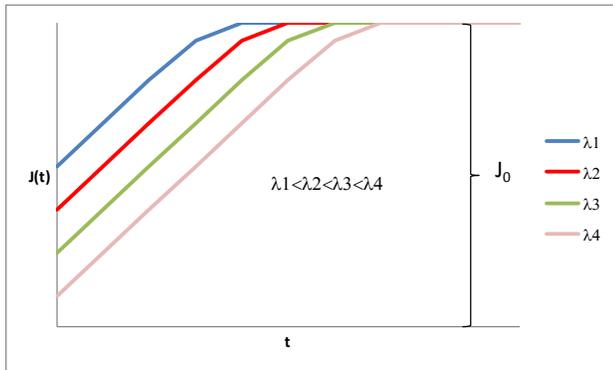


Figura 9. Função de fluência para o modelo de Voigt.

Como mostrado na Figura 9, quanto menor o tempo de retardação, mais rapidamente $J(t)$ converge para a compliância de equilíbrio $J_0 = 1/E_1$, isto é, quanto maior o módulo do modelo, mais cedo ele apresenta o comportamento típico de sólido. A resistência que o amortecedor oferece à deformação inicial é caracterizada por uma compliância quase nula em tempos curtos, ou seja, o material não se deforma instantaneamente e só muito lentamente irá permitindo uma deformação que cresce com o tempo.

Relaxação

Se em $t = 0$, for imposta uma deformação, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, que será mantida constante ao longo do tempo, resulta em:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_0 \quad (30)$$

ou seja, o modelo de Voigt se torna um sólido elástico ideal, no qual a tensão permanecerá constante durante a aplicação da deformação. Logo, o módulo de relação, dado por (31), será também constante e igual ao módulo da mola.

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_1 \quad (31)$$

Carregamento Harmônico

Embora o efeito seja o mesmo, para fins de simplificação de cálculos, suponha que em $t = 0$, seja aplicada uma deformação do tipo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (32)$$

resultando em uma taxa de deformação:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (33)$$

Substituindo-se as Eqs. (32) e (33) na Eq. (23), tem-se que:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_0 e^{i\omega t} + \eta_1 i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (34)$$

Definindo-se um módulo complexo, $E^*(\omega) = \sigma(t)/\varepsilon(t)$,

então,

$$E^*(\omega) = E_1 + i\omega \eta_1 \quad (35)$$

Propondo-se uma relação do tipo,

$$E^*(\omega) = E' + iE''$$

tem-se que $E' = E_1$ e $E'' = \lambda\omega E_1$. Logo,

$$tg(\delta) = \lambda\omega \quad (36)$$

Diferenças significativas podem ser observadas comparando-se as Figuras 10 e 11 com as Figura 6 e 7. Em termos de módulos, verifica-se que, enquanto no modelo de Maxwell o módulo complexo passa a ser igual ao módulo de armazenagem após o ponto de gel, na mesma situação, o módulo complexo do elemento de Voigt passa a ser igual ao módulo de perda. Isso se deve ao fato de que em tempos curtos, o elemento de Maxwell se assemelha a um sólido, e o de Voigt a um fluido. Isso é corroborado pelo comportamento do ângulo de perda com o tempo para os dois elementos, os quais são opostos. Ou seja, $\delta \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para o elemento de Voigt, e quando $t \rightarrow 0$ para o elemento de Maxwell.

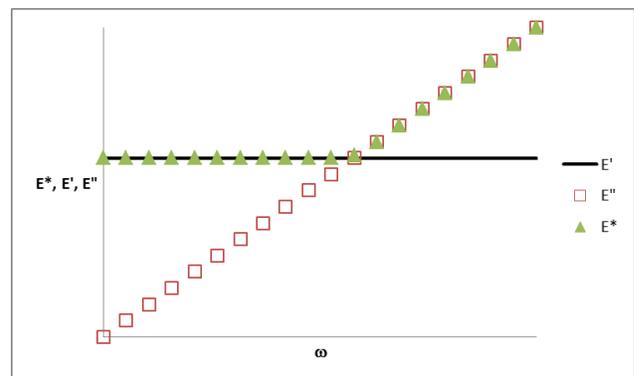


Figura 10. Variação dos módulos do elemento de Voigt com a frequência.

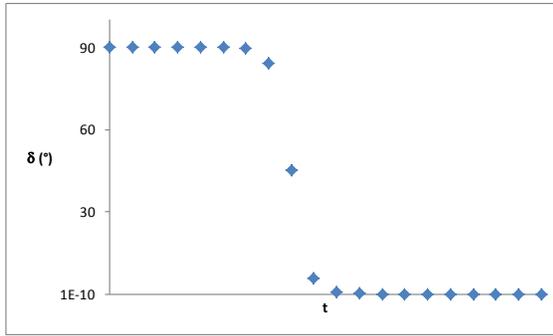


Figura 11. Evolução do ângulo de perda com o tempo para o elemento de Voigt.

Sólido Linear Padrão

Os modelos que seguem o padrão chamado de Sólido Linear Padrão (SLS em inglês), também chamados de modelos de Zener [1], são obtidos pela associação em série entre uma mola e um elemento de Voigt, ou pela associação em paralelo entre uma mola e um elemento de Maxwell, como mostrados na Figura 12.

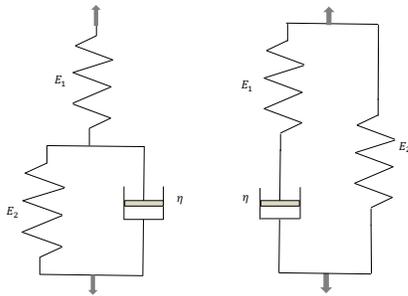


Figura 12. Modelos de Zener (SLS).

Pode-se, então, partir de qualquer dos modelos para se obter a equação constitutiva do SLS. Utilizando-se o modelo da associação em série, tem-se que, de acordo com as Eqs. (1) e (2):

$$\sigma = \sigma_{m1} = \sigma_{ev} \quad (37)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon_{m1} + \varepsilon_{ev} \quad (38)$$

em que os índices *m1* e *ev* se referem à mola 1 e ao elemento de Voigt, respectivamente. Como

$$\sigma_{m1} = E_1 \varepsilon_{m1} \quad (39)$$

e, de acordo com a Eq. (23) para um elemento de Voigt:

$$\sigma_{ev} = E_2 \varepsilon_{m2} + \eta \frac{d}{dt} \varepsilon_{m2} \quad (40)$$

$$E_1 \varepsilon_{m1} = E_2 \varepsilon_{m2} + \eta \frac{d}{dt} \varepsilon_{m2} \quad (41)$$

Diferenciando-se a Eq. (38) em relação ao tempo resulta em:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{m1} + \dot{\varepsilon}_{ev} \quad (42)$$

com $\dot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \varepsilon$. De (39) e (37), tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}_{m1} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (43)$$

De (40) e (37), tem-se que:

$$\varepsilon_{ev} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_2 \varepsilon_{m2}}{\eta} \quad (44)$$

Também se sabe que, de (38) e (39):

$$\varepsilon_{ev} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \quad (45)$$

Substituindo-se as Eqs. (43), (44) e (45) em (42), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_2}{\eta} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) \\ \dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon &= \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} + \frac{E_2}{\eta} \frac{\sigma}{E_1} \\ &= \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \\ \dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon &= \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

A Eq. (46) é a equação constitutiva para qualquer dos modelos SLS mostrados na Figura 12.

Fluência

Se esse sólido, em $t = 0$, for submetido a uma tensão constante, σ_0 , a Eq. (46) será reduzida para:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right)$$

De acordo com (27),

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \left[\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) \right] e^{-t \frac{E_2}{\eta}} + \frac{\sigma_0}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) = \\ &= \left[\varepsilon_0 - \sigma_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) \right] e^{-t/\lambda_F} + \sigma_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) \\ \varepsilon(t) &= \left(\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_R} \right) e^{-t/\lambda_F} + \frac{\sigma_0}{E_R} \end{aligned} \quad (47)$$

com ε_0 sendo a deformação instantânea do modelo devido à aplicação de σ_0 , ou seja, como em $t = 0$ apenas a mola 1 é deformada, já que o amortecedor do elemento de Voigt retarda a deformação da mola 2, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_1$, o que pode ser visto do lado esquerdo da Figura 13; $\lambda_F = \eta/E_2$ é o tempo de retardação do elemento de Voigt presente do modelo de Zener 1, também chamado de tempo de relaxação sob tensão constante; e E_R , o módulo resultante dado por $E_R = \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2}$. Esta solução está de acordo com o proposto por Nix (2017) [2].

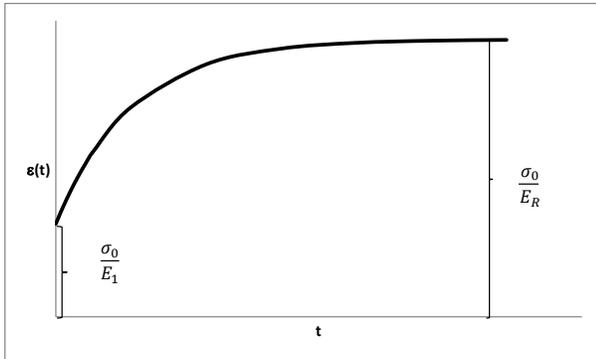


Figura 13. Comportamento sob fluência do SLS.

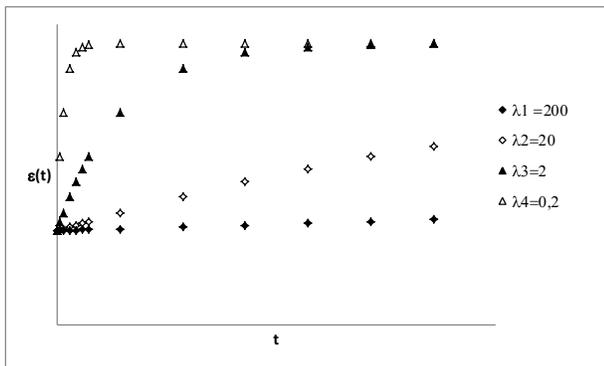


Figura 14. Influência do tempo de relaxação sob tensão constante na fluência do SLS.

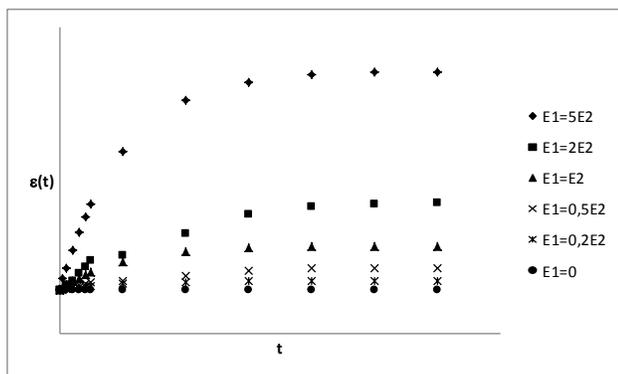


Figura 15. Influência da relação entre os módulos na fluência do SLS.

Na Figura 14, pode-se observar que quanto menor o tempo de retardação, mais rapidamente a deformação converge para o valor de equilíbrio, $\varepsilon_\infty = \sigma_0/E_R$, mostrada no lado direito da Figura 13. Quanto maior a diferença entre os módulos E_1 e E_2 , maior será o módulo resultante E_R e maior a diferença entre as deformações inicial, ε_0 , e de equilíbrio, ε_∞ , ou seja, como pode ser visto na Figura 15, maior será a fluência do material. Todavia, essa relação não parece influenciar no atingimento do equilíbrio, pois não há variação perceptível, em escala logarítmica de tempo, do tempo de equilíbrio, $t_\infty = t_{\varepsilon(t)=\varepsilon_\infty}$, para as várias relações E_1/E_2 mostradas na Figura 15.

Relaxação

Se em $t = 0$, o presente modelo for submetido a uma deformação constante, $\varepsilon = \varepsilon_0$, a Eq. (46) se torna:

$$\frac{1}{E_1} \frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{\sigma(t)}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) = \frac{E_2}{\eta} \varepsilon_0$$

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{\sigma(t)}{\eta} (E_1 + E_2) = \frac{E_2 E_1}{\eta} \varepsilon_0$$

cuja solução é

$$\sigma(t) = \left[\sigma_0 - \frac{E_2 E_1}{\eta} \varepsilon_0 \right] e^{-\left(\frac{E_1 + E_2}{\eta}\right)t} + \frac{E_2 E_1}{\eta} \varepsilon_0 =$$

$$= \left[\sigma_0 - \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \right] e^{-t/\lambda_R} + \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0$$

$$\sigma(t) = (\sigma_0 - E_R \varepsilon_0) e^{-t/\lambda_R} + E_R \varepsilon_0 \quad (48)$$

com $\lambda_R = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ sendo o tempo de relaxação do modelo.

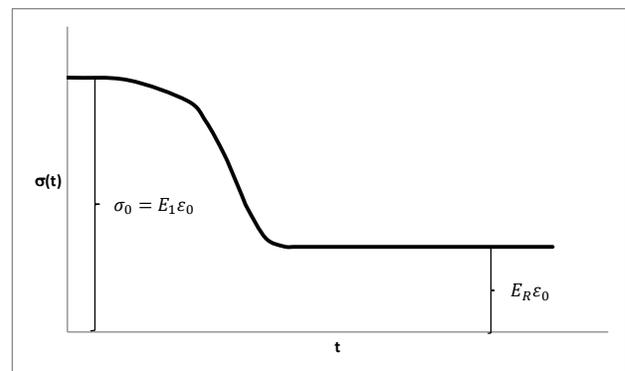


Figura 16. Comportamento sob relaxação do modelo de Zener.

Carregamento Harmônico

Embora o procedimento para obtenção do módulo e compliância complexos seja o mesmo dos aplicados aos modelos mais simples, o tratamento matemático é um pouco mais complicado e foge aos objetivos iniciais deste trabalho.

Se em $t = 0$, for aplicada uma deformação harmônica

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (49)$$

sua derivada em relação ao tempo será

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (50)$$

Substituindo-se as Eqs. (49) e (50) na Eq. (46), tem-se:

$$\frac{1}{E_1} \frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{\sigma}{\eta} \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{\lambda_F}$$

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{\sigma(t)}{\lambda_R} = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{\lambda_F} \right) E_1 \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\sigma(t) e^{t/\lambda_R} = \int \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{\lambda_F} \right) E_1 \varepsilon_0 e^{i\omega t} \cdot e^{t/\lambda_R} dt + C$$

$$\sigma(t) e^{t/\lambda_R} = \frac{\left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{\lambda_F} \right)}{\left(\frac{i\omega \lambda_R + 1}{\lambda_R} \right)} E_1 \varepsilon_0 e^{(i\omega + \lambda_R^{-1})t} + C$$

$$\sigma(t) = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon_0 e^{i\omega t} + C e^{-t/\lambda_R} \quad (51)$$

Se $\sigma(0) = \sigma_0$,

$$C = \sigma_0 - \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon_0$$

substituindo-se C em (51), tem-se que:

$$\sigma(t) = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon_0 e^{i\omega t} + \sigma_0 e^{-t/\lambda_R} - \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon_0 e^{-t/\lambda_R} \quad (52)$$

Comparando-se as Eqs. (49) e (52), resulta em:

$$\sigma(t) - \sigma_0 e^{-t/\lambda_R} = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon(t) - \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \varepsilon_0 e^{-t/\lambda_R}$$

ou seja,

$$\sigma(t) - \sigma_0 e^{-t/\lambda_R} = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R (\varepsilon(t) - \varepsilon_0 e^{-t/\lambda_R})$$

como

$$\frac{\sigma(t) - \sigma_0 e^{-t/\lambda_R}}{\varepsilon(t) - \varepsilon_0 e^{-t/\lambda_R}} = E^*(\omega)$$

então,

$$E^*(\omega) = \left(\frac{i\omega \lambda_F + 1}{i\omega \lambda_R + 1} \right) E_R \quad (53)$$

A Eq. (53) está de acordo com o proposto por Casula & Cancione (1992)[3]. Essa equação deve ser expandida para fornecer as expressões para os módulos de armazenagem e perda do modelo. Assim,

$$\frac{E^*(\omega)}{E_R} = \frac{1 + i\omega \lambda_F}{1 + i\omega \lambda_R} \times \frac{1 - i\omega \lambda_R}{1 - i\omega \lambda_R} = \frac{1 + i\omega \lambda_F - i\omega \lambda_R - i^2 \omega^2 \lambda_F \lambda_R}{1 + i\omega \lambda_R - i\omega \lambda_R - i^2 \omega^2 \lambda_R^2}$$

$$E^*(\omega) = E_R \left(\frac{1 + \omega^2 \lambda_F \lambda_R}{1 + \omega^2 \lambda_R^2} + i\omega \frac{\lambda_F - \lambda_R}{1 + \omega^2 \lambda_R^2} \right) \quad (54)$$

Propondo-se

$$E^*(\omega) = E' + iE''$$

$$E' = \frac{1 + \omega^2 \lambda_F \lambda_R}{1 + \omega^2 \lambda_R^2} E_R \quad (55)$$

$$E'' = \frac{\omega(\lambda_F - \lambda_R)}{1 + \omega^2 \lambda_R^2} E_R \quad (56)$$

e

$$tg(\delta) = \frac{\omega(\lambda_F - \lambda_R)}{1 + \omega^2 \lambda_F \lambda_R} \quad (57)$$

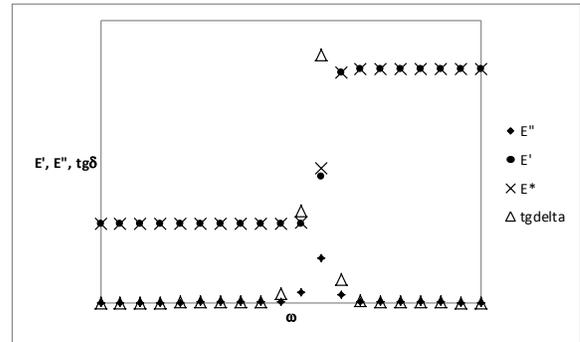


Figura 17. Variáveis complexas do modelo de Zener.

Como mostrado na Figura 17, o modelo de Zener representa de fato um sólido sob esforço harmônico, visto que o módulo complexo coincide com o módulo de armazenagem e o valor da tangente de perda está, sobretudo nas frequências iniciais e finais, sempre com valores nulos. No largo espectro de frequências observado, o modelo de Zener não apresenta a queda característica típica da fusão, havendo ligeira queda na

transição vítrea. Essa é a razão para não haver o encontro entre as curvas de E' e E'' em função da frequência.

Como visto na Figura 18, $E^*(\omega)$ sofre influência da relação entre os módulos afetado, E_2 , e não afetado E_1 pela ação do amortecedor de viscosidade, η . Quanto maior o valor do módulo E_2 , menor o tempo de retardação, $\lambda_F = \eta/E_2$, e, portanto, maior o caráter elástico do modelo como um todo. Isso pode ser visto pela crescente diminuição, até a eliminação, da transição de comportamento, observando-se que para $E_2/E_1 > 1$, a tendência é E^* se tornar independente da frequência, com o material apresentando um comportamento mais uniforme.

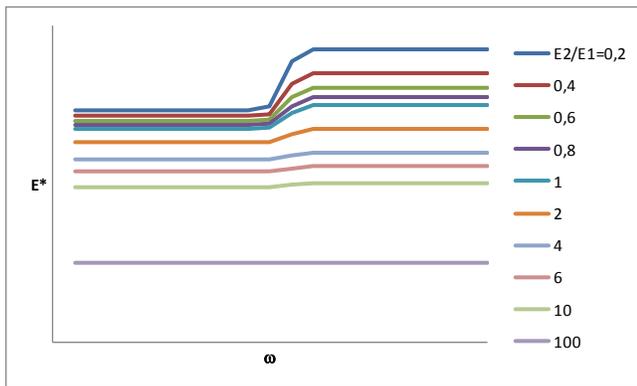


Figura 18. Efeito da relação entre os módulos E_1 e E_2 na dependência $E^*(\omega)$ do modelo Zener 1.

Para fins de prova, considere-se o modelo em paralelo entre um elemento de Maxwell (e_m) e uma mola (m_2), o qual será chamado de modelo de Zener 2. Para elementos em paralelo,

$$\sigma = \sigma_{e_m} + \sigma_{m_2} \quad (58)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon_{e_m} = \varepsilon_{m_2} \quad (59)$$

Individualizando-se,

$$\sigma_{e_m} = \sigma_{m_1} = \sigma_{\eta_1} \quad (60)$$

$$\varepsilon_{e_m} = \varepsilon_{m_1} + \varepsilon_{\eta_1} = \varepsilon_{m_2} = \varepsilon \quad (61)$$

Para o elemento de Maxwell, vide Eq. (8),

$$E_1 \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \frac{d}{dt} \sigma_{e_m} + \frac{1}{\lambda} \sigma_{e_m} \quad (62)$$

com $\lambda = \eta_1/E_1$ sendo o tempo de relaxação do modelo Zener 2.

Para a mola, pela lei de Hooke,

$$\sigma_{m_2} = E_2 \varepsilon(t) \quad (63)$$

e

$$\frac{d}{dt} \sigma_{m_2} = E_2 \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \quad (64)$$

Da Eq. (58),

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \frac{d}{dt} \sigma_{e_m} + \frac{d}{dt} \sigma_{m_2} \quad (65)$$

Substituindo-se as Eqs. (62) e (64) na (65), chega-se a:

$$(E_1 + E_2) \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \frac{d}{dt} \sigma_{e_m} + \frac{1}{\lambda} \sigma_{e_m} + \frac{d}{dt} \sigma_{m_2} \quad (66)$$

ou, segundo a Eq. (65):

$$(E_1 + E_2) \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{1}{\lambda} \sigma_{e_m} \quad (67)$$

Dividindo-se ambos os termos da Eq. 5.63 por λ , tem-se que:

$$\frac{\sigma_{m_2}}{\lambda} = \frac{E_2 \varepsilon(t)}{\lambda} \quad (68)$$

Somando-se $\frac{\sigma_{m_2}}{\lambda}$ ao lado direito e $\frac{E_2 \varepsilon(t)}{\lambda}$ ao lado esquerdo da Eq. (67), tem-se que:

$$(E_1 + E_2) \frac{d}{dt} \varepsilon(t) + \frac{E_2 \varepsilon(t)}{\lambda} = \frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{1}{\lambda} \sigma_{e_m} + \frac{\sigma_{m_2}}{\lambda}$$

$$(E_1 + E_2) \frac{d}{dt} \varepsilon(t) + \frac{E_2 \varepsilon(t)}{\lambda} = \frac{d}{dt} \sigma(t) + \frac{1}{\lambda} \sigma(t) \quad (69)$$

A Eq. (69) é a equação constitutiva do modelo de Zener 2, que é essencialmente a mesma que a Eq. (46), fazendo-se a substituição de λ por η/E_2 e os devidos arranjos.

Modelo de Oldroyd, Jeffreys ou antiZener

Esse modelo, que recebe várias denominações, dependendo da fonte [4], é caracterizado pela associação em série entre um amortecedor (am) e um elemento de Voigt (v) ou pela associação em paralelo entre um amortecedor e um elemento de Maxwell, como mostrado na Figura 19. Aqui, o modelo será chamado de antiZener, pois enquanto o modelo de Zener representa um sólido linear padrão (SLS), o modelo também chamado de modelo de Oldroyd ou de Jeffreys representa um fluido linear padrão (SLF).

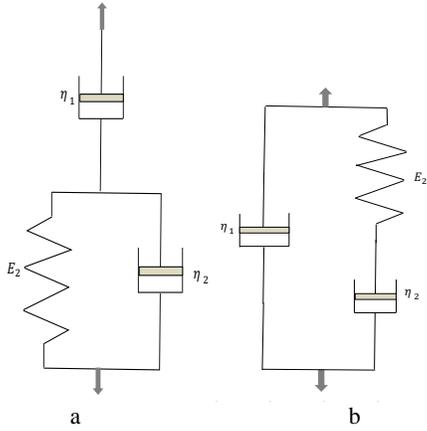


Figura 19. Representação do modelo de Oldroyd ou antiZener.

Partindo-se da associação em série do amortecedor e elemento de Voigt, modelo *a*, tem-se que:

$$\varepsilon = \varepsilon_{am}^1 + \varepsilon_v \quad (70)$$

e

$$\sigma = \sigma_{am}^1 = \sigma_v \quad (71)$$

De (70),

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon - \varepsilon_{am}^1 \\ \dot{\varepsilon}_v &= \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{am}^1 \\ \ddot{\varepsilon}_v &= \ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_{am}^1 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Para o elemento de Voigt, segundo a Eq. (23),

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon_v(t) + \eta_2 \frac{d\varepsilon_v(t)}{dt}$$

que diferenciada em relação ao tempo será:

$$\dot{\sigma} = E_2 \dot{\varepsilon}_v(t) + \eta_2 \ddot{\varepsilon}_v \quad (73)$$

Substituindo-se as relações da Eq. (72) na (73), ter-se-á:

$$\dot{\sigma} = E_2 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{am}^1) + \eta_2 (\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_{am}^1) \quad (74)$$

Pela Lei de Newton:

$$\varepsilon_{am}^1 = \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (75)$$

logo,

$$\dot{\varepsilon}_p^1 = \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1} \quad (76)$$

Introduzindo-se (75) e (76) em (74), resulta em:

$$\dot{\sigma} = E_2 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\eta_1} \right) + \eta_2 \left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1} \right)$$

ou

$$\left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma = \eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_2 \dot{\varepsilon} \quad (77)$$

Fluência

Partindo-se das Eqs. (70) e (71) e com a introdução da solução da Eq. (75) e da Eq. (28), tem-se que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta_1} t + \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \quad (78)$$

Se em $t = 0$, $\sigma(t) = \sigma_0$,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right)$$

sendo a função de fluência $J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$, então

$$J(t) = \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \quad (79)$$

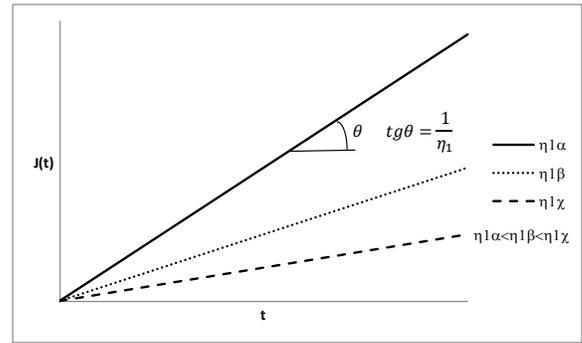


Figura 20. Função de Fluência do modelo antiZener.

Como visto na Figura 20, a viscosidade do amortecedor em série com o modelo de Voigt tem influência decisiva na forma como a deformação avança com o tempo. Quanto maior essa viscosidade menor vai ser o crescimento e a deformação final do corpo sob tensão constante.

Relaxação

A relaxação desse modelo é de solução que exige sofisticadas matemáticas para além dos objetivos deste trabalho. Existem soluções diferenciais, integrais e algébricas para a relaxação aqui tratada. De acordo com Mainard & Spada (2011)[4], para uma formatação da equação constitutiva do modelo antiZener do tipo:

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} \right) \sigma(t) = \left(b_1 \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right) \varepsilon(t) \quad (80)$$

a solução, para $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, quando $t = 0$, será:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E_- \delta(t) + E_+ e^{-t/\lambda_\sigma}] \quad (81)$$

com:

- a) $\delta(t)$ sendo a função delta de Dirac;
- b) $\lambda_\sigma = a_1$;
- c) $E_- = \frac{b_2}{a_1}$;
- d) $E_+ = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_1^2}$

Comparando-se as Eqs. (80) com (77), tem-se que:

$$a_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_2}; \quad b_1 = \eta_1; \quad b_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}$$

e a Eq. (81) se transforma em:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \delta(t) + \frac{\eta_1^2 E_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} e^{-E_2 t / (\eta_1 + \eta_2)} \right] \quad (82)$$

Carregamento Harmônico

Seguindo o mesmo princípio adotado, se $t = 0$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$,

$$\dot{\varepsilon} = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (83)$$

e

$$\ddot{\varepsilon} = i^2 \omega^2 \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (84)$$

A Eq. (77) pode ser modificada de forma que

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda_1} \sigma = \eta_R \ddot{\varepsilon} + \bar{E} \dot{\varepsilon} \quad (85)$$

com $\lambda_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_2}$, $\eta_R = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ e $\bar{E} = \frac{E_2 \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$.

Substituindo-se (83) e (84) em (85), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda_1} \sigma &= i^2 \omega^2 \eta_R \varepsilon_0 e^{i\omega t} + i\omega \bar{E} \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \\ &= (i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E}) \varepsilon_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

cuja solução obtém-se por:

$$\begin{aligned} \sigma(t) e^{t/\lambda_1} &= \int (i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E}) \varepsilon_0 e^{i\omega t} \cdot e^{t/\lambda_1} dt + C = \\ &= A \int e^{Bt} dt + C \end{aligned}$$

com $A = (i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E}) \varepsilon_0$ e $B = \frac{i\omega \lambda_1 + 1}{\lambda_1}$.

Se $\sigma(0) = \sigma_0$,

$$C = \sigma_0 - \frac{A}{B}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{A}{B} e^{i\omega t} + \sigma_0 e^{-t/\lambda_1} - \frac{A}{B} e^{-\frac{t}{\lambda_1}} = \\ &= \frac{(i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E}) \varepsilon_0 e^{i\omega t}}{B} - \frac{(i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E}) \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}}}{B} \\ &\quad + \sigma_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} = \\ &= \frac{(i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E})}{B} \left[\varepsilon(t) - \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \right] + \sigma_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\sigma(t) - \sigma_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}}}{\varepsilon(t) - \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}}} = \frac{(i^2 \omega^2 \eta_R + i\omega \bar{E})}{B} = E^*(\omega) \quad (86)$$

Substituindo-se B em (86) e com as devidas simplificações,

$$\begin{aligned} E^*(\omega) &= \frac{\omega \bar{E} \lambda_1 - \omega^2 \eta_R \lambda_1}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + i \frac{\omega \bar{E} \lambda_1 + \omega^3 \eta_R \lambda_1^2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \\ &= \omega \lambda_1 \left[\frac{(\bar{E} - \omega \eta_R)}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{(\bar{E} + \omega^2 \eta_R \lambda_1)}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right] \quad (87) \end{aligned}$$

Propondo-se $E^*(\omega) = E' + iE''$, tem-se que:

$$E' = \omega \lambda_1 \left(\frac{\bar{E} - \omega \eta_R}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right) = \omega \lambda_1 \bar{E} \left(\frac{1 - \omega \lambda_2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right) \quad (88)$$

e

$$E'' = \omega \lambda_1 \left(\frac{\bar{E} + \omega^2 \eta_R \lambda_1}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right) = \omega \lambda_1 \bar{E} \left(\frac{1 + \omega^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} \right) \quad (89)$$

De forma que

$$tg \delta = \frac{E''}{E'} = \left(\frac{1 + \omega^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 - \omega \lambda_2} \right) \quad (90)$$

com $\lambda_2 = \eta_2 / E_2$.

Modelo de Burgers

Seguindo a tendência verificada nos modelos de Zener, o modelo de Burgers visa a eliminar algumas incongruências apresentadas pelos modelos simples de Maxwell e de Voigt. Todavia, fazendo uso desses mesmos modelos. Assim, o modelo de Burgers, assim como o de Zener, apresentam várias configurações, mas todas tendo a mesma equação constitutiva. O modelo tratado nesse tópico é uma associação em série entre um modelo de Maxwell e um de Voigt ou dois elementos de Maxwell em paralelo, ou seja, são modelos de

Zener aos quais foi adicionado um amortecedor, como mostrado na Figura 21.

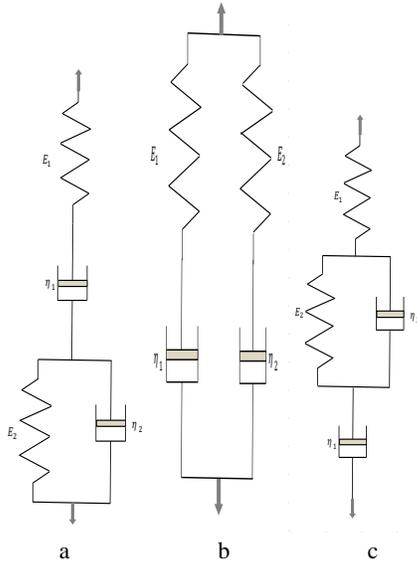


Figura 21. Formas de representação do modelo de Burgers.

Embora sejam representados pela mesma equação constitutiva, os modelos a, b e c têm propósitos teóricos diferentes. O modelo representado pela letra a, pode ser compreendido tanto como uma associação em série de um amortecedor ao modelo de Zener tipo 1, como associação em série de uma mola ao modelo Oldroyd-a ou antiZener 1 (Figura 21a). Esse modelo tem o propósito de representação da fluência. Se o amortecedor for adicionado ao modelo Zener tipo 2 ou uma mola adicionada ao modelo Oldroyd-b ou antiZener 2, resulta em dois modelos de Maxwell em paralelo (Figura 21b), e foi proposto como representação da relaxação[4]. O modelo tipo c, é o mesmo do tipo a só que permite uma interpretação mais simplificada dos fenômenos que o modelo de Burgers deve caracterizar: deformação instantânea (representada pela mola de módulo E_1), deformação viscoelástica (componente elástica pela mola de módulo E_2 em paralelo com a componente viscosa pelo amortecedor de viscosidade η_2) e deformação viscosa pelo amortecedor de Maxwell de viscosidade η_1 [5].

Tome-se a Figura 21a como referência inicial e os termos m e v representando os elementos de Maxwell e Voigt, respectivamente. Para elementos em série:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_v \quad (91)$$

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_v \quad (92)$$

de (91),

$$\varepsilon_v = \varepsilon - \varepsilon_m \quad (93)$$

Substituindo-se as Eqs. (92) e (93) na Eq. (23) (equação constitutiva do modelo de Voigt), tem-se que:

$$\sigma = E_2(\varepsilon - \varepsilon_m) + \eta_2 \frac{d}{dt}(\varepsilon - \varepsilon_m) \quad (94)$$

que, derivando-se em relação ao tempo, resulta em:

$$\frac{d}{dt}\sigma = E_2\left(\frac{d}{dt}\varepsilon - \frac{d}{dt}\varepsilon_m\right) + \eta_2 \frac{d^2}{dt^2}(\varepsilon - \varepsilon_m) \quad (95)$$

De acordo com a Eq. (8), para o elemento de Maxwell,

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_m = \frac{1}{E_1} \frac{d}{dt}\sigma + \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (96)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\varepsilon_m = \frac{1}{E_1} \frac{d^2}{dt^2}\sigma + \frac{d}{dt} \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (97)$$

Substituindo-se (96) e (97) em (95), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma = E_2 \left[\frac{d}{dt}\varepsilon - \left(\frac{1}{E_1} \frac{d}{dt}\sigma + \frac{\sigma}{\eta_1} \right) \right] \\ + \eta_2 \left[\frac{d^2}{dt^2}\varepsilon - \left(\frac{1}{E_1} \frac{d^2}{dt^2}\sigma + \frac{d}{dt} \frac{\sigma}{\eta_1} \right) \right] \end{aligned}$$

que separando-se as variáveis resulta em:

$$\frac{\eta_2}{E_1} \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma = E_2 \dot{\varepsilon} + \eta_2 \ddot{\varepsilon} \quad (98)$$

em que $\dot{\sigma}$ e $\ddot{\sigma}$ representam a primeira e segunda derivadas de σ em relação ao tempo, respectivamente.

A Eq. (98) é a equação constitutiva do modelo de Burgers, a qual é uma equação diferencial de segunda ordem com relação à tensão e à deformação, mas com coeficientes constantes que são funções de quatro parâmetros: E_1 , E_2 , η_1 e η_2 . Isso significa que todas as funções da tensão e da deformação e suas derivadas em relação ao tempo são funções lineares[6].

Fluência

Se em $t = 0$, $\sigma(t) = \sigma_0$, $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$. Assim, a Eq. (98) se reduz a:

$$E_2 \dot{\varepsilon} + \eta_2 \ddot{\varepsilon} = \frac{E_2}{\eta_1} \sigma_0 \quad (99)$$

cujas soluções, proposta por Nielsen (2006)[7] e modificada por Hong-Suo et al (2014)[8] será:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \quad (100)$$

A solução mostrada na Eq. (100) pode mais facilmente ser obtida utilizando-se do modelo tipo c, para o qual,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{m1} + \varepsilon_v(t) + \varepsilon_{am1}(t) \quad (101)$$

A Eq. (101) está de acordo com a definição do modelo tipo c feita por Chakespari, A. G., Rajabipour, A. & Mobli, H.

(2010)[5]. Sendo ε_{m1} a deformação instantânea proporcionada pela mola de módulo E_1 ; ε_v , a deformação viscoelástica do elemento de Voigt; e ε_{am1} a deformação viscosa do amortecedor de viscosidade η_1 , e como sob $\sigma(t) = \sigma_0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m1} &= \frac{\sigma_0}{E_1} \\ \varepsilon_v(t) &= \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \\ \varepsilon_{am1}(t) &= \frac{\sigma_0}{\eta_1} t \end{aligned}$$

cuja substituição na Eq. (101) resulta na Eq. (100).

Relaxação

Se em $t = 0$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = 0$. Assim, a Eq. (98) se transforma em

$$\frac{\eta_2}{E_1} \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma = 0 \quad (102)$$

cuja solução não é das mais simples. Todavia, se se parte do modelo b, tem-se que:

$$\sigma = \sigma_m^e + \sigma_m^d \quad (103)$$

em que e e d se referem aos elementos de Maxwell da esquerda e da direita, respectivamente.

Da Eq. (14), tem-se que a Eq. (103) se transforma em

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left(E_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} + E_2 e^{-\frac{t}{\lambda_2}} \right) \quad (104)$$

com $\lambda_1 = \eta_1/E_1$ e $\lambda_2 = \eta_2/E_2$ os tempos de relaxação dos dois elementos de Maxwell.

Carregamento Harmônico

Para fins de simplificação, para o modelo de Burgers, será feita a imposição em $t = 0$ de uma tensão $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$. Assim, $\dot{\sigma} = i\omega\sigma$ e $\ddot{\sigma} = i^2\omega^2\sigma_0 e^{i\omega t}$, e a Eq. (98) se transforma em:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\eta_2}{E_1} i^2 \omega^2 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) i\omega + \frac{E_2}{\eta_1} \right] \sigma_0 e^{i\omega t} \\ = E_2 \dot{\varepsilon} + \eta_2 \ddot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (105)$$

Definindo-se a compliância complexa $J^*(\omega) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)}$, da solução da Eq. (105), de acordo com Feng et al (2015)[9], tem-se que:

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{i\omega\eta_1} + \frac{1}{E_2 + i\omega\eta_2} \quad (106)$$

que expandida resulta em:

$$\begin{aligned} J^*(\omega) &= \frac{1}{E_1} - i \frac{1}{\omega\eta_1} + \left(\frac{E_2 - i\omega\eta_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2} \\ &\quad - i \left(\frac{1}{\omega\eta_1} + \frac{\omega\eta_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2} \right) \end{aligned} \quad (107)$$

$$J' = \frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2} \quad (108)$$

$$J'' = \frac{1}{\omega\eta_1} + \frac{\omega\eta_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2} \quad (109)$$

e

$$tg\delta = \frac{E_1}{\omega\eta_1} \frac{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2 + \omega^2\eta_1\eta_2}{E_2^2 + \omega^2\eta_2^2 + E_1E_2} \quad (110)$$

Modelos Generalizados

Modelo de Maxwell-Wiechert

O modelo de Maxwell-Wiechert[10] ou de Maxwell generalizado foi proposto por Wiechert pondo n elementos de Maxwell associados em paralelo[11], como mostrado na Figura 22. Para todos os elementos, a deformação será a mesma e a tensão do modelo será a soma das tensões individuais.

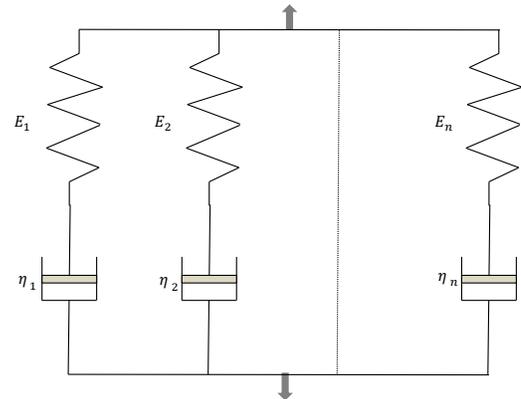


Figura 22. Modelo de Maxwell-Wiechert.

Para o elemento número 1, de acordo com a Eq. (8),

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}$$

assim como para o elemento i :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad (111)$$

e

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (112)$$

Usando $D = \frac{d}{dt}$, as Eqs. (111) e (112) se transformam em:

$$\sigma_i = \frac{D}{\frac{D}{E_i} + \frac{1}{\eta_i}} \varepsilon \quad (113)$$

e

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \frac{D}{\frac{D}{E_i} + \frac{1}{\eta_i}} \varepsilon \quad (114)$$

Multiplicando-se ambos os lados da Eq. (114) pelo produtório

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{D}{E_i} + \frac{1}{\eta_i} \right)$$

o operador D pode ser removido do denominador dessa equação[12]. Assim, tem-se que:

$$\left[\left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \sigma(t) = \left[\left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \cdot \left[\left(\frac{D}{\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1}} \right) \left(\frac{D}{\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2}} \right) \dots \right] \varepsilon(t) \quad (115)$$

O denominador comum da expressão entre colchetes do lado direito da expressão que multiplica $\varepsilon(t)$ é idêntico à expressão entre colchetes do lado esquerdo, e ambos podem ser eliminados. Dessa forma,

$$\left[\left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \sigma(t) = \left[D \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \left(\frac{D}{E_3} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dots \dots + \right. \\ \left. + D \left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{E_3} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dots \dots \right] \varepsilon(t) \quad (116)$$

A equação constitutiva deste modelo não permite solução para fluência.

Relaxação

Sob deformação constante, ε_0 , para $t \geq 0$, segundo abordagem de Karlsson (2014)[13], como para o elemento i :

$$\sigma_i = \varepsilon_0 E_i e^{-\frac{E_i t}{\eta_i}} \quad (117)$$

A Eq. (117) é o resultado da integração da Eq. (111) para uma deformação constante ε_0 . De acordo com (112):

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{E_i t}{\eta_i}} \quad (118)$$

Definindo-se o módulo de relaxação, $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$, então,

$$E(t) = \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\lambda_i} \quad (119)$$

Carregamento Harmônico

Seguindo-se a metodologia apresentada até o momento, de acordo com Navarro (1997)[11], é possível a obtenção das variáveis harmônicas do modelo de Maxwell-Wiechert, para o qual:

$$E' = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \omega^2 \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad (120)$$

$$E'' = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \omega \lambda_i}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad (121)$$

Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt[1] é representado pela associação em série de n elementos de Voigt, conforme mostrado na Figura 23.

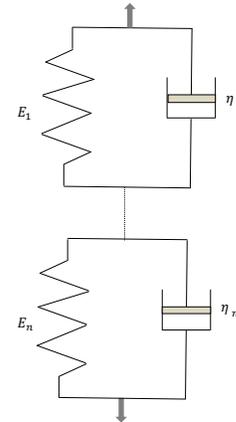


Figura 23. Modelo de Kelvin-Voigt.

Para elementos em paralelo,

$$\sigma = \sigma_1 = \dots \sigma_n \quad (122)$$

e a deformação será a soma das deformações iniciais. Assim,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (123)$$

A Eq. (23) para o elemento i é

$$\sigma(t) = E_i \varepsilon_i(t) + \eta_i \frac{d\varepsilon_i(t)}{dt}$$

ou seja, rearranjada, com o uso do operador D , resulta em[12]:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{D\eta_i + E_i} \sigma \quad (124)$$

Substituindo-se a Eq. (124) na (123), tem-se:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{D\eta_i + E_i} \right) \sigma \quad (125)$$

Se ambos os lados da Eq. (125) forem multiplicados por

$$\prod_{i=1}^n (D\eta_i + E_i)$$

pode-se eliminar o operador D do denominador e fazer as devidas simplificações, de forma que:

$$\begin{aligned} [(D\eta_1 + E_1)(D\eta_2 + E_2) \dots] \varepsilon(t) \\ = [(D\eta_2 + E_2)(D\eta_3 + E_3) \dots \\ + (D\eta_1 + E_1)(D\eta_3 + E_3) \dots \\ + \dots] \sigma(t) \quad (126) \end{aligned}$$

A Eq. (126) não permite solução para relaxação.

Fluência

Sob tensão constante para $t \geq 0$, para o elemento i , de acordo com a Eq. (28):

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_0}{E_i} (1 - e^{-t/\lambda_i}) \quad (127)$$

que substituída na Eq. (123), resulta em:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{E_i} (1 - e^{-t/\lambda_i}) \quad (128)$$

Em comparação com a Eq. (29), pode-se definir a compliância de fluência para o modelo generalizado Kelvin-Voigt da seguinte forma:

$$J(t) = \sum_{i=1}^n J_{0i} (1 - e^{-t/\lambda_i}) \quad (129)$$

com $J_{0i} = 1/E_i$ sendo a compliância instantânea de cada elemento.

Carregamento Harmônico

Se aplicada uma deformação do tipo $\varepsilon_j(t) = \varepsilon_{0j} e^{i\omega t}$, para $t \geq 0$, já foi visto que a Eq. (23) para o elemento j resultaria em

$$\sigma(t) = E_j \varepsilon_{0j} e^{i\omega t} + \eta_j i\omega \varepsilon_{0j} e^{i\omega t} \quad (130)$$

ou seja,

$$\varepsilon_j(t) = \varepsilon_{0j} e^{i\omega t} = \frac{\sigma(t)}{E_j + \eta_j i\omega} \quad (131)$$

Assim, a Eq. (123) se torna:

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma(t)}{E_j + \eta_j i\omega} \quad (132)$$

Uma vez que $J^*(\omega) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma(t)}$ e $\lambda_j = \frac{\eta_j}{E_j}$ e $D_j = 1/E_j$,

$$J^*(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{D_j \omega \lambda_j}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} \quad (133)$$

Modelo de Maxwell Generalizado Modificado

Ao modelo de Maxwell-Wiechert é adicionada uma mola para representar o comportamento elástico no equilíbrio, conforme mostrado na Figura 24.

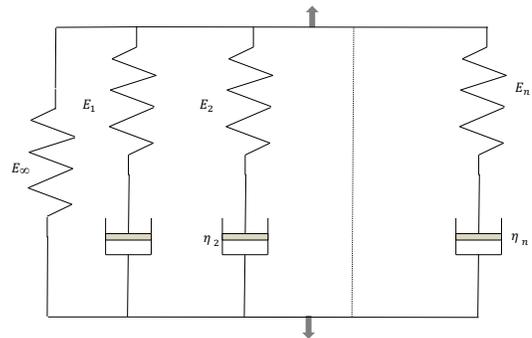


Figura 24. Modelo generalizado de Maxwell modificado (MGMM).

Uma vez que já foi calculada a tensão para o modelo de Maxwell-Wiechert (MW), para o MGMM,

$$\sigma(t) = \sigma_m^\infty + \sigma_{MW}$$

em que σ_m^∞ é a tensão na mola de módulo E_∞ . Assim, com uso da Eq. (114),

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^n \frac{D}{\frac{D}{E_i} + \frac{1}{\eta_i}} \varepsilon(t) \quad (134)$$

Relaxação

Sendo $\sigma(t) = \sigma_0$ em $t = 0$, a solução para um único elemento j de Maxwell, de acordo com a Eq. (13), seria:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\lambda_j} \quad (135)$$

Substituindo-se a Eq. (135), modificada de acordo com a (112), na Eq. (134) resulta em:

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^n \sigma_0 e^{-t/\lambda_j} \quad (136)$$

Segundo Rafal (2011)[14], se σ_0 em uma mesma deformação ε_0 para todos os elementos em paralelo, então $\sigma_0 = E_j \varepsilon_0$ e a Eq. (136) muda para

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left(E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j e^{-t/\lambda_j} \right) \quad (137)$$

E o módulo de relaxação, $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$, será

$$E(t) = E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j e^{-t/\lambda_j} \quad (138)$$

Definindo-se um módulo instantâneo $E_0 = E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j$, e introduzindo-se na Eq. (138), tem-se que:

$$E(t) = E_0 - \sum_{j=1}^n E_j \left(1 - e^{-t/\lambda_j} \right) \quad (139)$$

Segundo Meng et al (2013)[15], a Eq. (139) é essencialmente uma série de Prony, com E_∞ sendo o módulo de longo termo ou de equilíbrio, e E_j e λ_j o par de Prony. Se \bar{E} for um módulo adimensional dependente do tempo, a Eq. (139) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{E}(t) = 1 - \sum_{j=1}^n \bar{E}_j \left(1 - e^{-t/\lambda_j} \right) \quad (140)$$

Da Eq. (140) depreende-se que quando $t \ll \lambda_j$, $\bar{E}(t) = 1$, $E(t) = E_0$ e todos os amortecedores estariam parados. Para tempos maiores, $\bar{E}(t)$ é diminuído exponencialmente, assumindo o valor de E_∞ quando $t \rightarrow \infty$.

Carregamento Harmônico

Rafal (2011)[14] propõe que sob deformação harmônica, o modelo produz uma tensão tal que origina um módulo complexo dado por:

$$E^* = E_0 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{E_j \lambda_j^2 \omega^2}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^n E_j \right) + i E_0 \left(\sum_{j=1}^n \frac{E_j \lambda_j \omega}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} \right) \right] \quad (141)$$

Modelo de Kelvin-Voigt Modificado

Considere-se uma associação em série de um modelo de Kelvin-Voigt (MKV) em série com uma mola de módulo E_0 , conforme mostrado na Figura 25, obtém-se um modelo que permite apenas fluência, porém com uma deformação instantânea promovida pela mola de módulo E_0 .

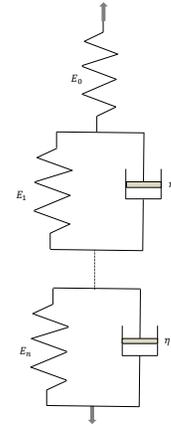


Figura 25. Modelo de Kelvin-Voigt modificado.

Fluência

O modelo mostrado na Figura 25 pode ser compreendido como um modelo de Zener associado com $n - 1$ modelos de Voigt em série. Para o modelo de Zener com módulos E_0, E_1 e viscosidade η_1 , segundo Betten (2008)[16].

Definindo-se $J_0 = 1/E_0$; $J_1 = 1/E_1$; $c = \eta_1/E_1$, sendo $\sigma(t) = \sigma_0$ para $t \geq 0$, a Eq. (47) pode assumir a seguinte forma:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = J_0 + J_1 [1 - e^{-t/\lambda_1}] \quad (142)$$

Se $n - 1$ modelos de Voigt forem suplementados ao modelo de Zener, resulta em uma função de fluência ou compliância de fluência dada por:

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i [1 - e^{-t/\lambda_i}] \quad (143)$$

Modelos com Amortecedores Variáveis

Modelo de Huet-Sayegh

Conforme mostrado na Figura 26, o modelo de Huet-Sayegh é um modelo de Huet modificado para atingir largo espectro de frequências e é caracterizado pela associação em paralelo de uma mola de módulo E_0 com um conjunto em série formado por uma mola de módulo $E_L = E_\infty - E_0$ (E_∞ sendo o módulo vítreo; E_0 , o módulo estático[18]) e dois amortecedores de viscosidade variável com constantes h e k , de modo que $0 < k < h < 1$ [17]. Do ponto de vista do ângulo de fase, um amortecedor linear está fora de fase 90° ($\pi/2$) com uma mola linear. Um amortecedor variável está defasado da mola linear por um múltiplo de 90° ($a\pi/2$).

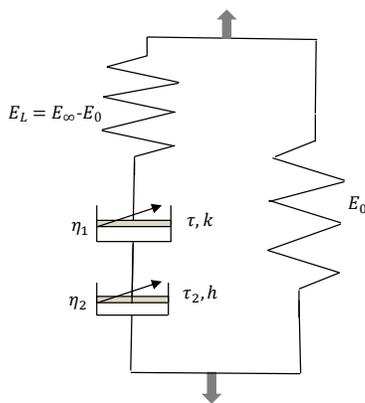


Figura 26. Modelo de Huet-Sayegh.

Carregamento Harmônico

De acordo com Pronk (2003)[17], Pronk (2012)[19], a operação matemática com amortecedores variáveis só é definida para sinais senoidais como:

$$\begin{aligned} \sigma e^{i\omega t} &= \eta \tau^{a-1} \Omega^a [\varepsilon e^{i(\omega t - \delta)}] \\ &= \frac{\eta}{\tau} (i\omega \tau)^a [\varepsilon e^{i(\omega t - \delta)}] \end{aligned} \quad (144)$$

na qual, $\sigma e^{i\omega t}$ é a tensão imposta; $\varepsilon e^{i(\omega t - \delta)}$, a deformação resultante; τ , uma constante de decaimento de tempo; η , a viscosidade, e Ω um operador matemático especial. A partir da Eq. (144) um amortecedor variável pode ser visto como um elemento reológico, para sinais senoidais, entre uma mola linear ($a = 0$) e um amortecedor linear ($a = 1$).

Ainda segundo Pronk (2012)[19], a deformação resultante da aplicação da tensão, que será nula para o amortecedor variável se o parâmetro $a < 1$, será calculada a partir da Eq. (144), resultando em:

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} i\omega \left[\frac{1}{\eta \tau^{a-1} (i\omega)^a} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma dt \right] = 0 \text{ para } 0 < a < 1 \quad (145)$$

Para um sinal senoidal do tipo $e^{i\omega t}$, resulta um módulo complexo da forma[17]:

$$E^*(\omega) = E_0 + \frac{E_L}{1 + \delta_1(i\omega\tau_1)^{-k} + \delta_2(i\omega\tau_2)^{-h}} \quad (146)$$

com $\delta_i = \frac{\tau_i E_L}{\eta_i}$ sendo uma constante adimensional. O módulo estático e o módulo vítreo relacionam-se com o módulo complexo da seguinte forma:

$$\begin{cases} E^*(\omega \rightarrow 0) = E_0 \\ E^*(\omega \rightarrow \infty) = E_\infty \end{cases} \quad (147)$$

Modelo de Huet-Sayegh Modificado

A partir de modificação feita por Olard & Di Benedetto[20], foi adicionado um amortecedor ao modelo de Huet-Sayegh, como mostrado na Figura 27, tornando o modelo conhecido como 2S2P1D. Esse modelo tem o módulo complexo dado por[18]:

$$\begin{aligned} E^*(\omega) &= E_0 \\ &+ \frac{E_L}{1 + \delta_1(i\omega\tau_1)^{-k} + \delta_2(i\omega\tau_2)^{-h} + \delta_3(i\omega\beta\tau_3)^{-1}} \end{aligned} \quad (148)$$

$$\text{com } \beta = \frac{\eta}{\tau_3 E_L}.$$

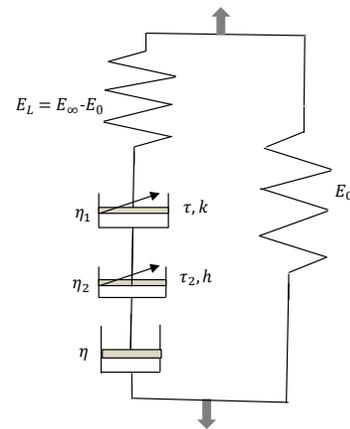


Figura 27. Modelo de Huet-Sayegh Modificado ou Modelo 2S2P1D.

Modelo de Huet-Sayegh Generalizado

A partir do modelo de Huet-Sayegh modificado, Zbiciak & Rafal (2014)[18] propuseram seu próprio modelo, como mostrado na Figura 28, o qual contém n amortecedores fracionais ou de viscosidade variável. Para esse modelo,

$$E^*(\omega) = E_0 + \frac{E_L}{1 + (i\omega\tau)^{-k_N} + \sum_{n=1}^{N-1} \delta_n (i\omega\tau)^{-k_n}} \quad (149)$$

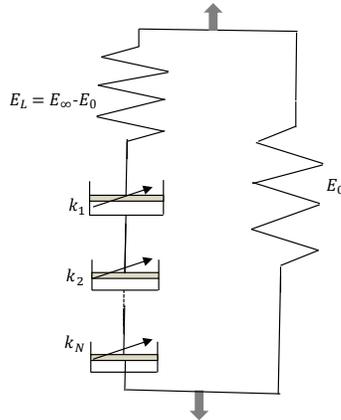


Figura 28. Modelo de Huet-Sayegh Generalizado.

Referências

- [1] Zener, C, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Chicago: University of Chicago Press, 1946.
- [2] Nix, W. D., http://jrgreer.caltech.edu/content/teaching/MS116Files/Lectures/5_Anelasticity.pdf capturado em 08/05/2017.
- [3] Casula, G. & Cancione, J. M., Generalized mechanical model analogic of linear viscoelastic behaviour, *Bulletino di Geofisica Teorica ed Applicata*, Vol. XXXIV, N° 136, 1992.
- [4] Mainard, F. & Spada, G., Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, *The European Physical Journal, Special Topics*, Vol. 193 (2011) 133-160.
- [5] Chakespari, A. G., Rajabipour, A. & Mobli, H., Anisotropic relaxation and creep properties of apple, *Advance Journal of Food Science and Technology*, 2 (4): 200-205 (2010).
- [6] Skrzypek, J.j. & Ganczarski, A. W., *Mechanics of Anisotropic Materials*, Engineering Materials, Chapter 2, Springer Int. Publishing Switzerland, Zurich, 2015.
- [7] Nielsen, L. F., Power law creep as related to adapter burgers creep representations and incremental analysis, BYG.DTU, R-137, 2006.
- [8] Zhi-jun, F., Jia-ming, Z. & Hong-suo, Y., A constitutive model for mudstone shear creep, *EJGE*, Vol. 19, 259-271, 2014.
- [9] Feng, H., Pettinari, M., Hofko, B. & stang, H., Study of the internal mechanical response of an asphalt mixture by 3-D discrete element modeling, *Constructing and Building Materials*, 77 (2015) 187-196.
- [10] Aklonis, J. J. & MacKnight, W. J., in: *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, 2end ed., John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [11] Navarro, R. F., *Fundamentos de Reologia de Polímeros*, EDUCS, Caxias do Sul, 1997.
- [12] Findley, W.N., Lai, S.J. & Onaran, K., *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with Introduction to Linear Viscoelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 1989.
- [13] Karlsson, P., *Determination of Viscoelastic Properties of Adhesives*, Tese de Mestrado, Linæus University, Vaxjo, Suécia, 2014.
- [14] Rafal, M., Implementation of generalized viscoelastic material model in abaqus code, *Logistyka*, 6, 2884-2890, 2011.
- [15] Meng, Y., Xia, Y., Young, T.M., Cai, Z. & Wang, S., Viscoelasticity of wood cell with different moisture content as measured by nano indentation, *RSC Advances*, p. 1-11, 2013.
- [16] Betten, J., *Creep Mechanics*, 3th Ed., p.204, Springer, Berlin, 2008.
- [17] Pronk, A. C., Revival of the huet-sayegh reponse model, notes on huet-sayegh rheological model, *DWW*, 29, 2003.
- [18] Zbiciak, A. & Rafal, M., Chararacterization of the complex moduli for asphat-aggregate mixtures as various temperatures, *Procedia Engineering*, 91, p. 118-123, 2014.
- [19] Pronk, A. C., The Huet-Sayegh Model: A simple and excellent rheological model for master curves of asphaltic mixes, asphalt concrete, ASCE, publicado online em 26/04/2012, DOI: [http://dx.doi.org/10.1061/40825\(185\)8](http://dx.doi.org/10.1061/40825(185)8).
- [20] Olard, F. & Di Benedetto, H., General “2s2p1d” model and relation between the linear viscoelastic behaviours of betuminous binders and mixes, *International Journal of Road Materials and Pavement Design*, v. 4, n. 2, 185-224, 2003.